# Une suite de Fibonacci aléatoire

**Leçons.** 223, 224, 226, 230, 235, 261, 262, 264, 266.

**Théorème.** Soient $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in ]0,1[^{\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}(1,p_n)$. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} U_{n+2} = U_{n+1} + Y_n U_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ U_0 = U_1 = 1 \end{cases}.$$

(i) Si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = +\infty$, alors $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} +\infty$.

(ii) Soient $f : (x,y) \mapsto 1 + \frac{y}{x}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite (déterministe) définie par

$$\begin{cases} a_{n+1} &= f(a_n, 1), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ a_0 &= 1 \end{cases}.$$

Si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $p \in ]0,1[$, alors :

$$\frac{1}{n}\ln(U_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \sum_{i=0}^{+\infty} \ln(a_i)(1-p)p^i.$$

## Preuve de (i).

Une récurrence immédiate permet de montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est presque sûrement positive. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire $U_{n+2} - U_{n+1} = Y_n U_n$ est presque sûrement positive, et donc, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît, presque sûrement.

Par télescopage et par croissance de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout $n \geq 2$ :

$$\begin{aligned} U_n - U_1 &= \sum_{k=0}^{n-2} \big(U_{k+2} - U_{k+1}\big) = \sum_{k=0}^{n-2} Y_k U_k \\ &\geq U_0 \sum_{k=0}^{n-2} Y_k = \mathrm{Card}\{k \in [\![0, n-2]\!], Y_k = 1\}. \end{aligned}$$

On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_k = 1) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = +\infty$ et les variables aléatoires $Y_k$ sont indépendantes. Donc d'après le lemme de Borel-Cantelli 2, on a $\mathbb{P}\big(\limsup_{k\to+\infty}(Y_k = 1)\big) = 1$, autrement dit, presque sûrement, une infinité d'événements $(Y_k = 1)$ sont réalisés.

En particulier, $\mathrm{Card}\{k \in [\![0, n-2]\!], Y_k = 1\} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} +\infty$, et par comparaison, on a également

$$\boxed{U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} +\infty.}$$

## Preuve de (ii).

On suppose désormais que $p_n = p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Étude de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement définie car $a_0 = 1 \in [1,2]$ et

$$f([1,2], 1) = \left[\frac{3}{2}, 2\right] \subset [1,2].$$

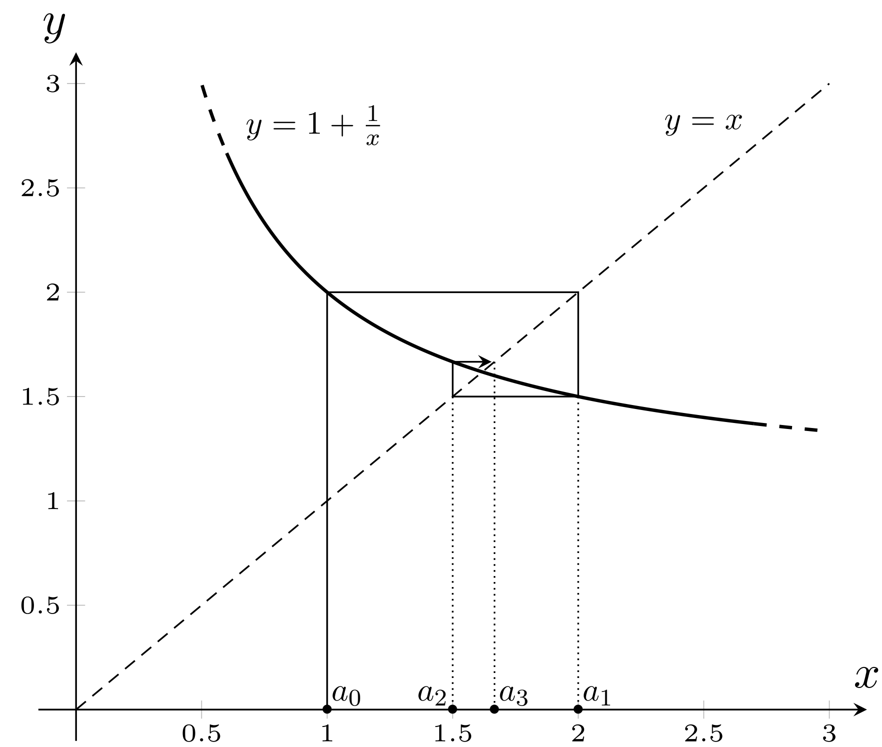


**Figure 1.** Premiers termes de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La fonction $f(\cdot,1)$ étant décroissante sur $[1,2]$, $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de monotonies contraires. Comme ces deux suites sont bornées, elles convergent, nécessairement vers un point fixe de $f(\cdot,1)\circ f(\cdot,1)$, et ce par continuité de $f(\cdot,1)$. Or après calcul, $f(\cdot,1)\circ f(\cdot,1) : x \mapsto \frac{2x+1}{x+1}$, application qui admet le nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ pour unique point fixe sur $[1,2]$. Donc $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et par suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $\varphi$.

**Introduction d'une chaîne de Markov auxiliaire.**

Introduisons la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $V_n = \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Ainsi définie la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $V_0 = 1 = a_0$ et la relation de récurrence : $\forall n\in\mathbb{N},\ \ V_{n+1} = 1 + \frac{Y_n}{V_n} = f(V_n, Y_n)$. La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ évolue donc dans l'espace d'états $E = \{a_k, k\in\mathbb{N}\}$ selon une dynamique markovienne que l'on peut illustrer par le graphe pondéré ci-dessous.

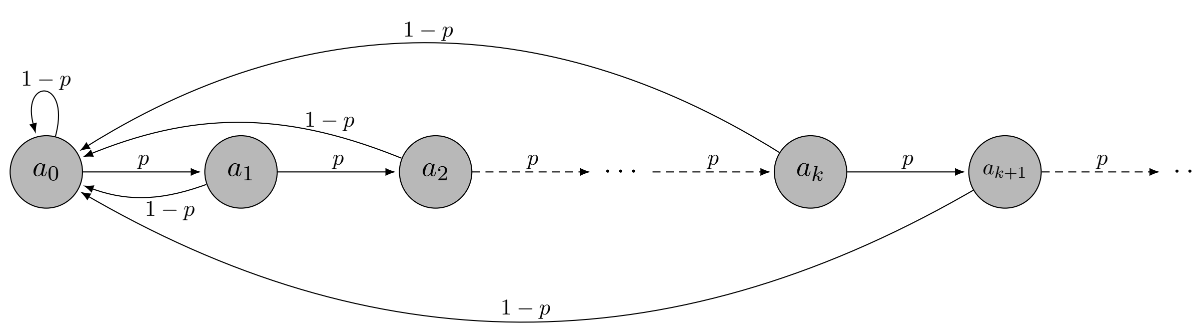


**Figure 2.** Graphe pondéré de la chaîne de Markov $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Proportion moyenne de temps passé en $a_0$.** Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $N_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(V_i=a_0)}$. C'est le nombre de visites de l'état $a_0$ par $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entre les instants 1 et $n$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$N_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(Y_{i-1}=0)}.$$

Les variables aléatoires $(\mathbb{1}_{(Y_{i-1}=0)})_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(1,1-p)$, d'espérance $1-p$. En vertu de la **loi forte des grands nombres**, on a alors :

$$\frac{1}{n}N_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 1-p. \tag{1}$$

En particulier, puisque $1-p>0$, on a aussi :

$$N_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} +\infty. \tag{2}$$

**Temps d'atteinte successifs de $a_0$ et durées d'excursions.** On définit la suite $(T^{(r)})_{r\in\mathbb{N}}$ des temps d'atteinte successifs de $a_0$ par :

$$\begin{cases} T^{(r+1)} & = \min\{n > T^{(r)}, V_n = a_0\}, \text{ pour tout } r\in\mathbb{N} \\ T^{(0)} & = 0 \end{cases}.$$

Pour tout $r\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T^{(r)}<+\infty)=1$. En effet, (2) garantit que presque sûrement, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ revient une infinité de fois en $a_0$. Pour tout $r\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$\Delta_r = T^{(r)} - T^{(r-1)},$$

qui est la durée de la $r^{\text{e}}$ excursion de $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en dehors de l'état $a_0$.

– Montrons que les $\Delta_r$, $r\in\mathbb{N}^*$, ont la même loi $\mathcal{G}(1-p)$.

Soient $r\in\mathbb{N}^*$ et $j\in\mathbb{N}$. Sachant $(T^{(r-1)}=j)$, la variable aléatoire $\Delta_r$ est le rang de la première réalisation d'un des événement $((Y_i=0))_{i\geq j}$ (qui sont indépendants et de même probabilité $1-p$). La loi conditionnelle de $\Delta_r$ sachant $(T^{(r-1)}=j)$ est donc $\mathcal{G}(1-p)$.
Mais $((T^{(r-1)}=j))_{j\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, on a donc[1] bien $\Delta_r\sim\mathcal{G}(1-p)$.

– Montrons que les $\Delta_r$, $r\in\mathbb{N}^*$, sont mutuellement indépendantes.

Soient $k\geq 2$ un entier et $(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in(\mathbb{N}^*)^k$. On pose $s_r=\sum_{j=1}^{r-1} i_j$ pour tout $r\in\mathbb{N}^*$. On a :

$$\bigcap_{r=1}^{k}(\Delta_r=i_r)=\bigcap_{r=1}^{k}\left(\bigcap_{j=0}^{i_r-2}(Y_{s_r+j}=1)\cap(Y_{s_r+i_r-1}=0)\right).$$

Donc, par indépendance des $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{r=1}^{k}(\Delta_r=i_r)\right) &= \prod_{r=1}^{k}\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{i_r-2}(Y_{s_r+j}=1)\cap(Y_{s_r+i_r-1}=0)\right)\\ &= \prod_{r=1}^{k}\left(\mathbb{P}\big(Y_{s_r+i_r-1}=0\big)\prod_{j=0}^{i_r-2}\mathbb{P}\big(Y_{s_r+j}=1\big)\right)\\ &= \prod_{r=1}^{k}(1-p)p^{i_r-1} = \prod_{r=1}^{k}\mathbb{P}\big(\Delta_r=i_r\big),\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de l'indépendance de $(\Delta_r)_{r\in\mathbb{N}^*}$.

**Preuve d'un théorème ergodique.** Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{i=0}^{T^{(N_n+1)}-1}\ln(V_i)=\sum_{r=1}^{N_n+1}\sum_{i=T^{(r-1)}}^{T^{(r)}-1}\ln(V_i)=\sum_{r=1}^{N_n+1}\sum_{i=0}^{\Delta_r-1}\ln(a_i).$$

1. Écrire la formule des probabilités totales appliquée à $(\Delta_r=k)$ relativement au système complet d'événements $((T^{(r-1)}=j))_{j\in\mathbb{N}}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on pose alors $Z_r = \sum_{i=0}^{\Delta_r - 1} \ln(a_i)$.

Les variables aléatoires $Z_r$, $r \in \mathbb{N}^*$, sont indépendantes par indépendance de la suite $(\Delta_r)_{r\in\mathbb{N}^*}$, et de même loi. Montrons qu'elles sont aussi intégrables. On constate que :

$$\forall r \in \mathbb{N}^*,\ Z_r = \sum_{i=0}^{+\infty} \ln(a_i)\mathbb{1}_{(\Delta_r \geq i+1)},$$

donc en utilisant successivement le théorème de Fubini-Tonelli et le fait que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit à valeurs dans $[1, 2]$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_1] &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\ln(a_i)\mathbb{1}_{(\Delta_1 \geq i+1)}\right] \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \ln(a_i)\mathbb{P}(\Delta_1 \geq i+1) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \ln(a_i)p^i \leq \ln(2)\sum_{i=0}^{+\infty} p^i = \frac{\ln(2)}{1-p} < +\infty.
\end{aligned}$$

Donc d'après la **loi forte des grands nombres** :

$$\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} Z_r \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}[Z_1]. \tag{3}$$

Finalement, d'après (1), (2) et (3), on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{T^{(N_n+1)}-1} \ln(V_i) = \frac{N_n+1}{n} \times \frac{1}{N_n+1}\sum_{r=1}^{N_n+1} Z_r \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} (1-p)\,\mathbb{E}[Z_1].$$

La même convergence est valable pour $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{T^{(N_n)}-1}\ln(V_i)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Reste à constater[1] que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $T^{(N_n)} \leq n < T^{(N_n+1)}$, ce qui implique :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{T^{(N_n)}-1} \ln(v_i) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln(v_i) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{T^{(N_n+1)}-1} \ln(V_i)$$

par positivité des $(\ln(V_i))_{i\in\mathbb{N}}$. Donc par théorème d'encadrement :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln(V_i) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} (1-p)\,\mathbb{E}[Z_1] = \sum_{i=0}^{+\infty}\ln(a_i)(1-p)p^i.$$

Or par télescopage, $\sum_{i=0}^{n-1}\ln(V_i) = \sum_{k=0}^{n-1}(\ln(U_{i+1}) - \ln(U_i)) = \ln(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Finalement :

$$\boxed{\frac{1}{n}\ln(U_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \sum_{i=0}^{+\infty}\ln(a_i)(1-p)p^i,}$$

ce qui achève la preuve. $\square$

1. En effet, $T^{(N_n)}$ est le temps du **dernier retour en** $a_0$ **entre les instants** 1 **et** $n$, donc $T^{(N_n)} \leq n$, et $T^{(N_n+1)}$ le temps de retour en $a_0$ suivant, donc $T^{(N_n+1)} > n$.